

Aufgabe 18)

Bezierkurven

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) P_i \text{ wobei } B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i (1-t)^{n-1}$$

a) Formel für Kurve 4.Grades:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{i=0}^4 B_{i,4}(t) P_i \\ &= \binom{4}{0} \cdot t^0 (1-t)^4 \cdot P_0 + \binom{4}{1} \cdot t^1 (1-t)^3 \cdot P_1 + \binom{4}{2} \cdot t^2 (1-t)^2 \cdot P_2 + \binom{4}{3} \cdot t^3 (1-t)^1 \cdot P_3 + \binom{4}{4} \cdot t^4 (1-t)^0 \cdot P_4 \\ &= (1-t)^4 \cdot P_0 + 4t (1-t)^3 \cdot P_1 + 6t^2 (1-t)^2 \cdot P_2 + 4t^3 (1-t) \cdot P_3 + t^4 \cdot P_4 \end{aligned}$$

b) Kontrollpunkte und Grad der Kurve

Eine Kurve ersten Grades enthält 2 Punkte, eine Kurve 2 Grades enthält 3 Kontrollpunkte, eine dritten Grades enthält 4 Kontrollpunkte.

→ eine Kurve n-ten Grades enthält n+1 Kontrollpunkte

c) Punkte in einer Kurve 3. Grades

Punkte: $P_0 = (-3, -2)^T$; $P_1 = (-1, -3)^T$; $P_2 = (1, 3)^T$; $P_3 = (3, -11)^T$

Herleitung der Formel wie oben

$$\rightarrow C(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Verschiedene T-Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} C\left(\frac{1}{3}\right) &= (1-\frac{1}{3})^3 \cdot P_0 + 3 \frac{1}{3} (1-\frac{1}{3})^2 \cdot P_1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 (1-\frac{1}{3}) \cdot P_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot P_3 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 (-3, -2)^T + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (-1, -3)^T + \frac{2}{9} (1, 3)^T + \frac{1}{27} (3, -11)^T \\ &= \left(-\frac{8}{9}, -\frac{16}{27}\right)^T + \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{3}\right)^T + \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\right)^T + \left(\frac{1}{9}, -\frac{11}{27}\right)^T = \left(-1, \frac{5}{3}\right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\left(\frac{1}{2}\right) &= (1-\frac{1}{2})^3 \cdot P_0 + 3 \frac{1}{2} (1-\frac{1}{2})^2 \cdot P_1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1-\frac{1}{2}) \cdot P_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot P_3 \\ &= \frac{1}{8} (-3, -2)^T + \frac{3}{8} (-1, -3)^T + \frac{3}{8} (1, 3)^T + \frac{1}{8} (3, -11)^T \\ &= \left(-\frac{3}{8}, -\frac{2}{8}\right)^T + \left(-\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)^T + \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)^T + \left(\frac{3}{8}, -\frac{11}{8}\right)^T = \left(0, -\frac{13}{8}\right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 \cdot P_0 + 3 \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot P_1 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot P_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot P_3 \\ &= \frac{1}{27}(-3, -2)^T + \frac{6}{27}(-1, -3)^T + \frac{12}{27}(1, 3)^T + \frac{8}{27}(3, -11)^T \\ &= \left(-\frac{3}{27}, -\frac{2}{27}\right)^T + \left(-\frac{6}{27}, -\frac{18}{27}\right)^T + \left(\frac{12}{27}, \frac{36}{27}\right)^T + \left(\frac{24}{27}, -\frac{88}{27}\right)^T = \boxed{\left(1, -\frac{8}{3}\right)^T} \end{aligned}$$

Steigungen:

$$C(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

$$\rightarrow C'(t) = -3(1-t)^2 P_0 + (9t^2 - 12t + 3)P_1 + (6t - 9t^2)P_2 + 3t^2 P_3$$

Die Steigung ergibt sich dann aus der Steigung des Vektors zum berechneten Punkt, d.h. $m = Y/X$

$$\begin{aligned} C'\left(\frac{1}{3}\right) &= -3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 P_0 + \left(9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{3}\right) + 3\right)P_1 + \left(6\left(\frac{1}{3}\right) - 9\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)P_2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 P_3 \\ &= -\frac{4}{3}(-3, -2)^T + 0(-1, -3)^T + 1(1, 3)^T + \frac{1}{3}(3, -11)^T \\ &= \left(4, \frac{8}{3}\right)^T + (1, 3)^T + \left(1, -\frac{11}{3}\right)^T = (6, 2)^T \\ &\rightarrow m = Y/X = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'\left(\frac{1}{2}\right) &= -3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 P_0 + \left(9\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 3\right)P_1 + \left(6\left(\frac{1}{2}\right) - 9\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)P_2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_3 \\ &= -\frac{3}{4}(-3, -2)^T + \left(-\frac{3}{4}\right)(-1, -3)^T + \frac{3}{4}(1, 3)^T + \frac{3}{4}(3, -11)^T \\ &= \left(\frac{9}{4}, \frac{6}{4}\right)^T + \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)^T + \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)^T + \left(\frac{9}{4}, -\frac{33}{4}\right)^T = \left(6, -\frac{9}{4}\right)^T \\ &\rightarrow m = Y/X = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'\left(\frac{2}{3}\right) &= -3\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 P_0 + \left(9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{2}{3}\right) + 3\right)P_1 + \left(6\left(\frac{2}{3}\right) - 9\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)P_2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 P_3 \\ &= -\frac{1}{3}(-3, -2)^T + (-1)(-1, -3)^T + 0(1, 3)^T + \frac{4}{3}(3, -11)^T \\ &= \left(1, \frac{2}{3}\right)^T + (1, 3)^T + \left(4, -\frac{44}{3}\right)^T = (6, -11)^T \\ &\rightarrow m = Y/X = -\frac{11}{6} \end{aligned}$$

d) Kurven und Funktionen

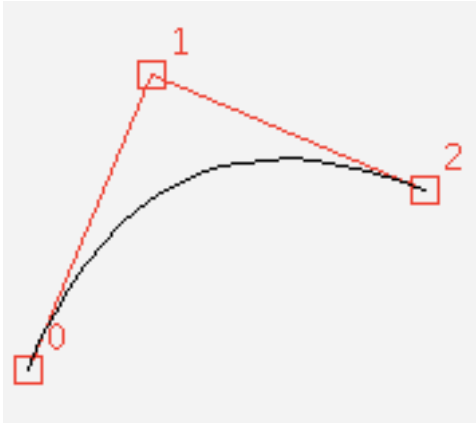
Unter Umständen kann man Bezier Kurven zweiten Grades in Funktionen umwandeln.

Das ist der Fall, falls die Kurven zu jedem x-Wert höchstens ein y-Wert besitzen.

Da eine Kurve zweiten Grades 3 Kontrollpunkte P_0 , P_1 und P_2 besitzt, und da der Punkt in der Mitte (also, P_1) die Richtung bestimmt aus der die Kurve von P_0 aus nach P_2 kommt, gilt, dass damit die Kurve als Funktion umgewandelt werden kann, die X-Werte aller drei Kontrollpunkte stetig fallen bzw. steigen müssen, also:

$$P_0.X < P_1.X < P_2.X \quad \text{oder} \quad P_0.X > P_1.X > P_2.X$$

Hier ein Beispiel für eine Kurve mit Kontrollpunkte die obiges Kriterium erfüllen, und somit sich als Funktion transformieren lassen würde:



Hier ein Beispiel wo die Bedingung nicht erfüllt ist, und damit die Umwandlung nicht möglich wäre:

