

Aufgabe 4:

a) $\vec{r} = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + r \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y$

- Drehung in Polarkoordinaten heißt einfach nur, dass der Drehungswinkel β zum Anfangswinkel α hinzuaddiert wird, also:

polar: $(\alpha, r) \rightarrow$ kartesisch: $(r \cdot \cos(\alpha); r \cdot \sin(\alpha))$

↓ (Drehung)

polar: $(\alpha + \beta, r) \rightarrow$ kartesisch: $(r \cdot \cos(\alpha + \beta); r \cdot \sin(\alpha + \beta))$

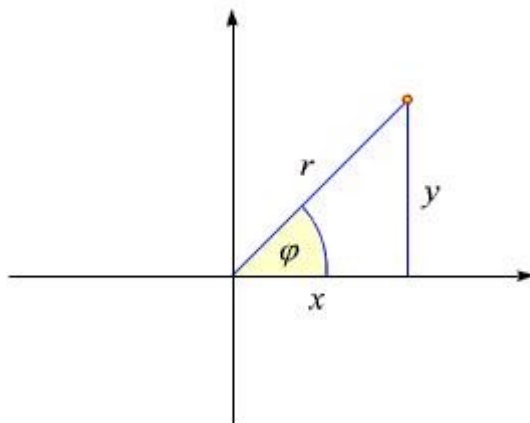
- Skalierung in Polarkoordinaten heißt einfach nur, dass der Skalierungsfaktor s mit der Anfangslänge r multipliziert wird, also:

polar: $(\alpha, r) \rightarrow$ kartesisch: $(r \cdot \cos(\alpha); r \cdot \sin(\alpha))$

↓ (Skalierung)

polar: $(\alpha, r \cdot s) \rightarrow$ kartesisch: $(r \cdot s \cdot \cos(\alpha); r \cdot s \cdot \sin(\alpha))$

- Die Translation ist nicht trivial, da sie nicht einfach durch Addition berechnet werden kann, da die Vektoren als ein Winkel und eine Länge dargestellt werden
- Umrechnung:



Aus der obigen Skizze, den Pythagorassatz und den trigonometrischen Sätzen, ergibt sich:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $\alpha =$	$\arctan \frac{y}{x} + \pi$	für $x < 0$,
	$\arctan \frac{y}{x}$	für $x > 0$,
	$\frac{\pi}{2}$	für $x = 0$ und $y > 0$
	$-\frac{\pi}{2}$	für $x = 0$ und $y < 0$,
	unbestimmt	für $x = y = 0$

b) Umrechnungen

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ in Polar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4.472$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{-2}{-4}\right) + \pi = \arctan(0.5) + \pi \approx 3.605$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (kartesisch)} \rightarrow (\sqrt{20}, \arctan(0.5) + \pi) \approx (4.472, 3.605) \text{ (polar)}$$

- Drehung (die Umrechnungen werden nicht mehr so ausführlich wie oben aufgeschrieben):

$$\text{Winkel: } 32,4^\circ \text{ entsprechen } 2 \cdot \pi \cdot \frac{32,4}{360} \approx 0.566 \text{ Bogenmaß}$$

Da **im** Uhrzeigersinn gedreht wird, muss dieser Drehungswinkel vom Anfangswinkel subtrahiert werden, also:

$$P = (\sqrt{20}, \arctan(0.5) + \pi)$$

↓ (Drehung)

$$P' = (\sqrt{20}, \arctan(0.5) + \pi - 2 \cdot \pi \cdot \frac{32,4}{360}) \approx (4.472, 3.040)$$

in kartesischen Koordinaten wäre das dann (laut der obersten Formel):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.472 \cdot \cos 3.040 \\ 4.472 \cdot \sin 3.040 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -4.449 \\ 0.455 \end{pmatrix}$$

Da es sich nur um eine Drehung handelt, kann man auch daran sehen, dass sich die Länge des Vektors nicht verändert hat, da $(-4.449)^2 + 0.455^2 = 20$ ist.

- Skalierung:

Faktor: 1.75, also:

$$P = (\sqrt{20}, \arctan(0.5) + \pi)$$

↓ (Skalierung)

$$P' = (\sqrt{20} \cdot 1.75, \arctan(0.5) + \pi) \approx (7.826, 3.605)$$

in kartesischen Koordinaten wäre das dann (laut der obersten Formel):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7.826 \cdot \cos 3.605 \\ 7.826 \cdot \sin 3.605 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -7 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

- c) Die Reihenfolge der Transformationen spielt in Polarkoordinaten keine Rolle, da die Informationen der Länge eines Vektors, und dessen Lage im Vergleich zur positiven x-Achse getrennt voneinander gespeichert werden. Dies bedeutet, dass eine Änderung der Länge (eben durch eine Skalierung) den Winkel nicht verändert, und umgekehrt. Diese Tatsache ist aus den obigen Formeln recht klar zu sehen, da r nicht von φ abhängt, und φ nicht von r . An den Beispielen ist deutlich zu sehen, dass bei einer Skalierung sich NUR r ändert und bei einer Drehung nur φ . Deswegen spielt die Reihenfolge keine Rolle, da das hintereinanderführen von Drehung und Skalierung zum gleichen Ergebnis führt, unabhängig davon, was als erstes ausgeführt wird.